Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Φροντιστηριακές ασκήσεις #7, Μάιος 2016, Ορθογώνιοι Πίνακες, Συμμετρικοί Πίνακες, Τετραγωνικές Μορφές

1. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι ορθογώνιος πίνακας. Δείξτε ότι ο πίνακας $A + 3I_n$ είναι αντιστρέψιμος.

2. Θεωρούμε τον συμμετρικό πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Να βρεθεί ορθογώνιος πίνακας P έτσι ώστε: $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.

3. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$f(x, y, z) = (ax - y + z, -x + by - z, x - y + 2z),$$

όπου $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ και $a, b \in \mathbb{R}$.

- Να υπολογίσετε τα a, b έτσι ώστε η απεικόνιση f να έχει ιδιοτιμή το 1 με πολλαπλότητα 2.
- Για τις τιμές των a, b που θα βρείτε στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ που να αποτελείται από ιδιοδιανύσματα της f και στη συνέχεια
- να βρεθεί πίνακας B έτσι ώστε $B^m = A$, όπου A είναι ο πίνακας της f στην κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ και m φυσικός αριθμός.

4. Να υπολογίσετε όλες τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ ώστε ο συμμετρικός πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

να είναι θετικά ορισμένος.

5. Έστω A και B δύο θετικά ορισμένοι συμμετρικοί $n \times n$ πραγματικοί πίνακες. Να αποδείξετε ότι ο πίνακας $aA + bB$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, όπου a, b είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε ένας τουλάχιστον από τους δύο να είναι διάφορος του μηδενός.

6. Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή $q : \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$q((x, y, z)^t) = 9x^2 + 6y^2 + 3z^2 - 4xy$$

Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή q στους κύριους άξονές της, οι οποίοι και να βρεθούν. Να δείξετε ότι ο πίνακας A της q είναι θετικά ορισμένος. Να βρεθεί συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας B έτσι ώστε $B^2 = A$.

Φυλλάδιο #7

Άσκηση 1

Έστω $A+3I$ δεν είναι αντιστρέψιμος $\Rightarrow$
$\det(A+3I)=0 \Rightarrow -3$ ιδιοτιμή του A,
άτοπο αφού ορθογώνιοι πίνακες μπορεί να έχουν πραγματικές ιδιοτιμές μόνο ± 1.
Άρα $A+3I$ αντιστρέψιμος

Άσκηση 5

$(\alpha A+\beta B)^t = (\alpha A)^t + (\beta B)^t = \alpha A^t + \beta \cdot B^t = \alpha A + \beta \cdot B$

άρα $\alpha A+\beta B$ συμμετρικός

Έστω $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ $\quad x \neq 0_{n\times 1}$

$x^t(\alpha A+\beta B)x \quad > 0$

$x^t(\alpha A+\beta B)x = x^t \alpha A x + x^t \beta \cdot B x$

$= \alpha \cdot \underbrace{x^t \cdot A \cdot x}_{>0} + \beta \cdot \underbrace{x^t B x}_{B>0} > 0$

άρα $A>0$ άρα $B>0$

"Προσοχή στις θετικές σταθερές!"

Άσκηση 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ P ορθ. $P^t \cdot A \cdot P$ διαγώνιο

A συμμετρικός

Έστω $\lambda \neq \mu \in \mathbb{R}$ ιδιοτιμές του A

$X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ $\quad AX = \lambda X$

$Y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ $\quad AY = \mu \cdot Y$

- $\langle AX, Y \rangle = \langle \lambda X, Y \rangle = \lambda \langle X, Y \rangle$
- $\langle AX, Y \rangle = (AX)^t \cdot Y = X^t \cdot A^t \cdot Y = X^t \cdot A \cdot Y = \langle X, AY \rangle$ $= \langle X, \mu Y \rangle = \mu \langle X, Y \rangle$

Άρα $\lambda \langle X Y \rangle = \mu \langle X, Y \rangle$

$\underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} \langle X, Y \rangle = 0$ άρα $\langle X, Y \rangle = 0$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$\chi_A(x) = \det(A - xI) =$

$$= \det \begin{pmatrix} 1-x & -1 & 0 \\ -1 & 2-x & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{pmatrix}$$

$= (1-x)(2-x)(1-x) - (1-x) - (1-x) =$

$= (1-x)^2(2-x) - 2(1-x) [(x-2)(x-1) - 2)$

$= (1-x)(x^2 - 3x) = (1-x)(x-3) \cdot x$

Ιδιοτιμές $1, 0, 3$

$V(1)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \;\middle|\; (A-1I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

$\left(\begin{array}{ccc|c}0&-1&0&0\\-1&1&-1&0\\0&-1&0&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$ $\quad x-y+z=0,\quad y=0,\quad z=t$

$x=-t$
$y=0$ άρα $V(1)=\left\langle\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\right\rangle$
$z=t$

$V(0)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \;\middle|\; (A-0I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&0\\-1&2&-1&0\\0&-1&1&0\end{array}\right) \xrightarrow{r_2+r_1} \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$ $\quad \begin{array}{l}x-y=0\\y-z=0\\z=0\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{l}x=t\\y=t\\z=t\end{array}$

Άρα $V(0)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}\right\rangle$

όπου $V(1)\perp V(0)$

$V(3)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \;\middle|\; (A-3I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

$\left(\begin{array}{ccc|c}-2&-1&0&0\\-1&-1&-1&0\\0&-1&-2&0\end{array}\right) \begin{array}{c}-r_2\\r_1\\r_3\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\-2&-1&0&0\\0&-1&-2&0\end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&1&2&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$

$x+y+z=0 \qquad z=t$

$y+2z=0 \qquad y=-2t$

$z=t \qquad x=t$

Així $V(3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\rangle$

$P^t \cdot A \cdot P = D(\text{vaps})$

$$\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$